

 POLITECNICO DI MILANO

Dipartimento di  
Elettronica e Informazione

# Ricorsione, questa sconosciuta

Matteo Ferroni  
[matteo.ferroni@polimi.it](mailto:matteo.ferroni@polimi.it)

05/12/2017



POLITECNICO  
DI MILANO



# Agenda

---

(20') Sottomatrici, da un altro punto di vista

(30') Ricerca binaria (ricorsiva)

(30') Calcolo derivata (ricorsiva)

(30') Numero primo, in tutte le salse

# Sottomatrici, da un altro punto di vista

- Creare una matrice di dimensione  **$2n \times 2n$**  che nel suo centro contiene un quadrato  $2 \times 2$  che contiene il valore 1 e, andando verso l'esterno, i valori 2, 3, .. fino a  **$n$**  nella cornice più esterna.

Esempio:

$$\begin{bmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 2 & 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

# Sottomatrici, versione 1

```
function [M] = sottoMatr(n)
```

[illegible]

# Sottomatrici, versione 1

```
function [M] = sottoMatr(n)
```

```
if(n == 1)
```

```
M = ones(2,2);
```

[illegible]

# Sottomatrici, versione 1

```
function [M] = sottoMatr(n)
```

```
if(n == 1)
```

```
M = ones(2,2);
```

```
else
```

```
M = sottoMatr(n-1);
```

[illegible]

# Sottomatrici, versione 1

```
function [M] = sottoMatr(n)
```

```
if(n == 1)
```

```
M = ones(2,2);
```

```
else
```

```
M = sottoMatr(n-1);
```

```
r = ones(1, size(M, 2)) * n;
```

$$M = \begin{bmatrix} r & M & r \end{bmatrix};$$
[illegible]

# Sottomatrici, versione 1

```
function [M] = sottoMatr(n)
```

```
if(n == 1)
```

```
    M = ones(2,2);
```

```
else
```

```
    M = sottoMatr(n-1);
```

```
    r = ones(1, size(M, 2)) * n;
```

```
    M = [r; M ; r];
```

```
    c = ones(size(M, 1), 1) * n;
```

```
    M = [c M c];
```

```
end
```

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6



# Sottomatrici, versione 2

---

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

```
function [matrRis]=sottoMatrici2(n)
```

# Sottomatrici, versione 2

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

```
function [matRis]=sottoMatrici2(n)
```

```
if n==1
```

```
    matRis=ones(2);
```

# Sottomatrici, versione 2

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

```
function [matrRis]=sottoMatrici2(n)
```

```
if n==1
```

```
    matrRis=ones(2);
```

```
else
```

```
    matrRis=n*ones(2*n);
```

# Sottomatrici, versione 2

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	1	1	2	3	4	5	6
6	5	4	3	2	2	2	2	3	4	5	6
6	5	4	3	3	3	3	3	3	4	5	6
6	5	4	4	4	4	4	4	4	4	5	6
6	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	6
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6

```
function [matRis]=sottoMatrici2(n)
```

```
if n==1
```

```
    matRis=ones(2);
```

```
else
```

```
    matRis=n*ones(2*n);
```

```
    matRis(2:2*n-1,2:2*n-1)=sottoMatrici2(n-1);
```

```
end
```

# Agenda

---

~~(20') Sottomatrici, da un altro punto di vista~~

(30') Ricerca binaria (ricorsiva)

(30') Calcolo derivata (ricorsiva)

(30') Numero primo, in tutte le salse

# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

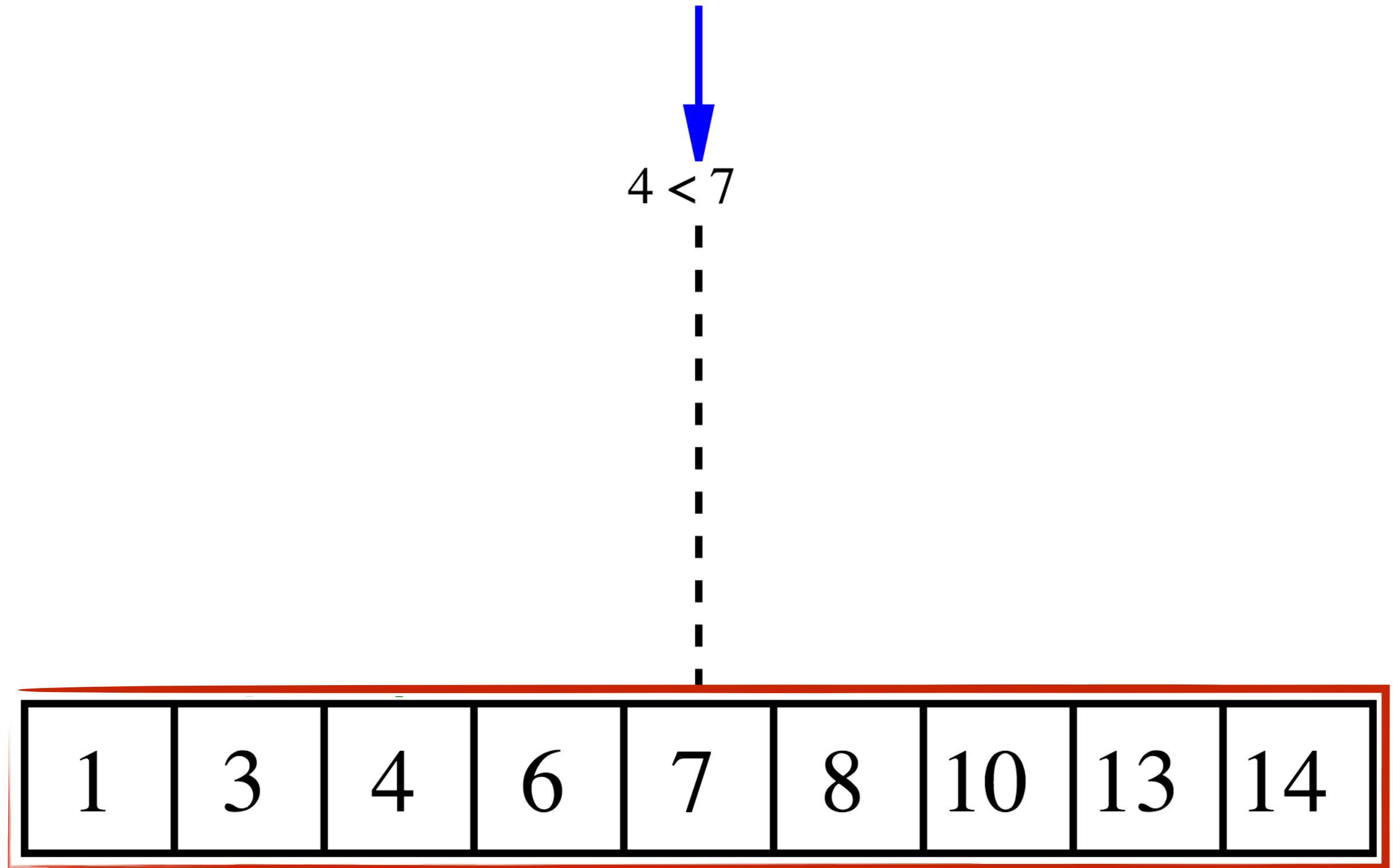
---

- Effettuare una **ricerca binaria** di un valore all'interno di un array ordinato. Il valore  $F$  é intero e l'array  $a$  é di interi.

*RICERCA BINARIA: di volta in volta cerco nel **punto medio** di un intervallo che si dimezza in lunghezza ad ogni invocazione dell'algoritmo, **tenendo** opportunamente **la parte destra o sinistra** a seconda che il **punto medio fosse a destra o a sinistra** del valore  **$F$***

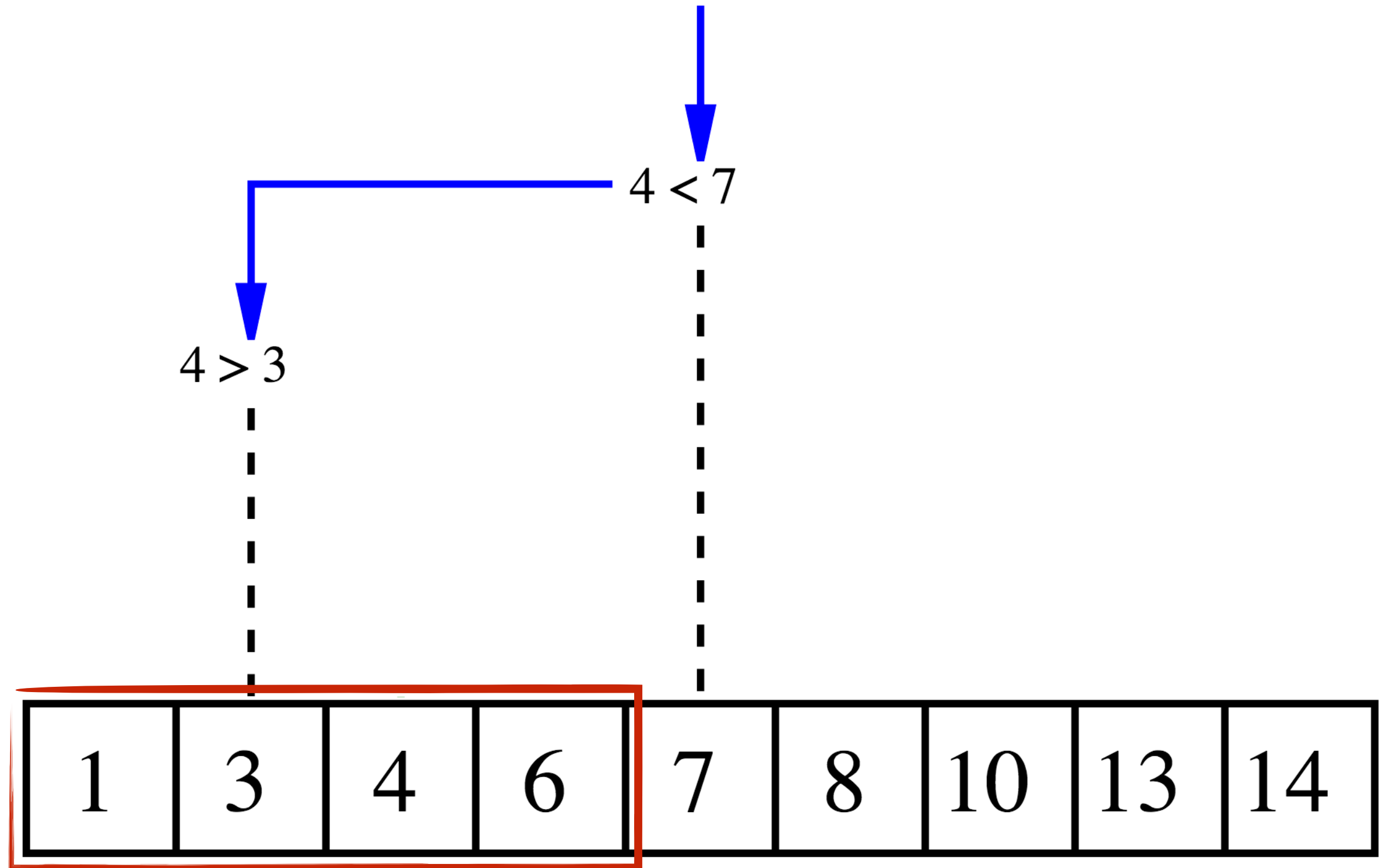
# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---



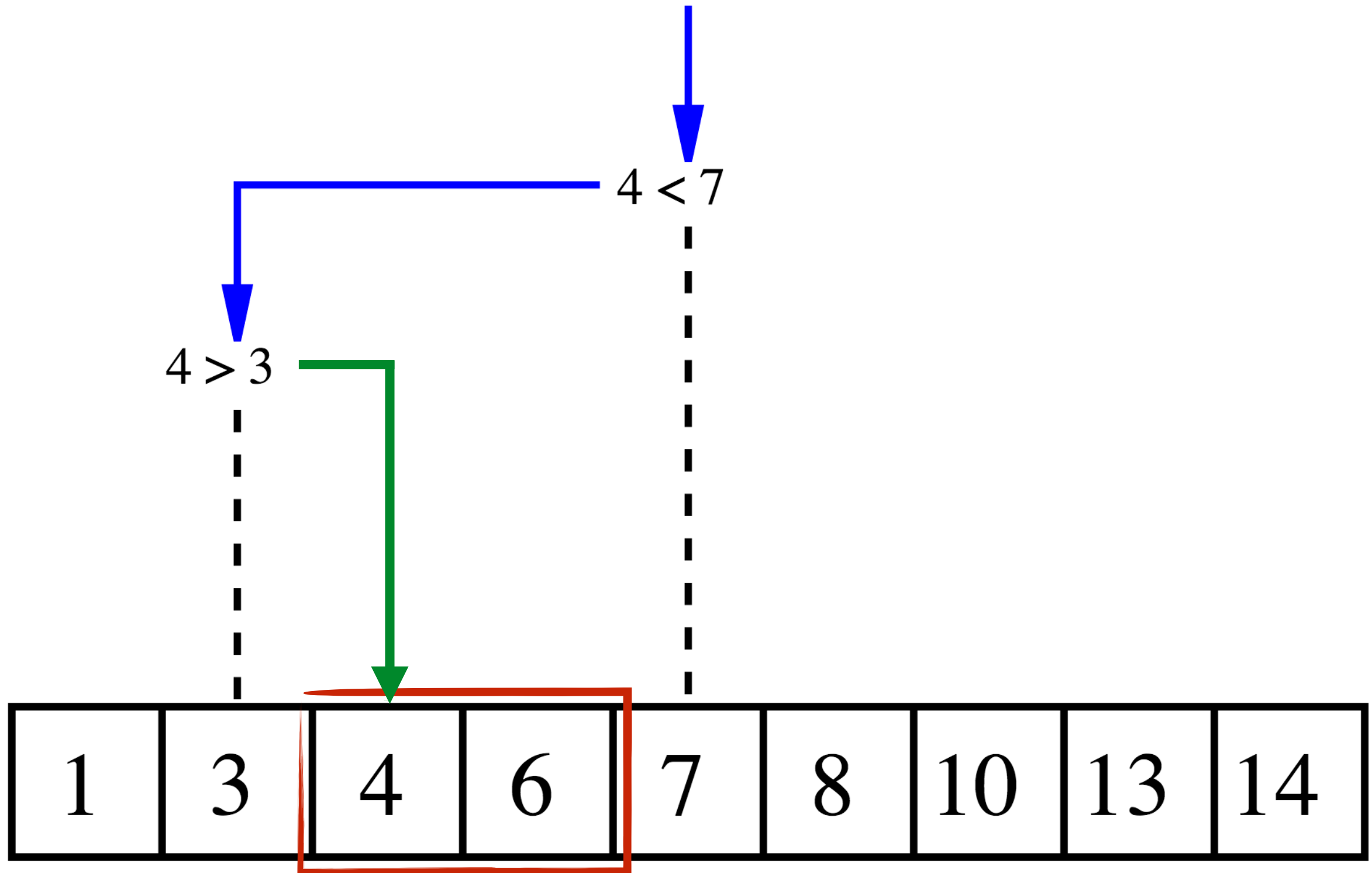
# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---





# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)



# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---

```
function val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra)
```

# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---

```
function val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra)
    elementoMedio = floor((limDestra + limSinistra)/2);
```

# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---

```
function val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra)

    elementoMedio = floor((limDestra + limSinistra)/2);

    if (v(elementoMedio) == cercato)
        val = elementoMedio;
```

# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---

```
function val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra)

    elementoMedio = floor((limDestra + limSinistra)/2);

    if (v(elementoMedio) == cercato)
        val = elementoMedio;
    else

        val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra);

    end
```

# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---

```
function val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra)

    elementoMedio = floor((limDestra + limSinistra)/2);

    if (v(elementoMedio) == cercato)
        val = elementoMedio;
    else
        if (v(elementoMedio) > cercato)
            limDestra = elementoMedio;

        val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra);
    end
```

# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

```
function val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra)

    elementoMedio = floor((limDestra + limSinistra)/2);
```

```
    if (v(elementoMedio) == cercato)
        val = elementoMedio;
    else
```

**Caso particolare**

```
        if (v(elementoMedio) > cercato)
            limDestra = elementoMedio;
        else
            limSinistra = elementoMedio;
        end
```

**Caso generale**

```
        val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra);
```

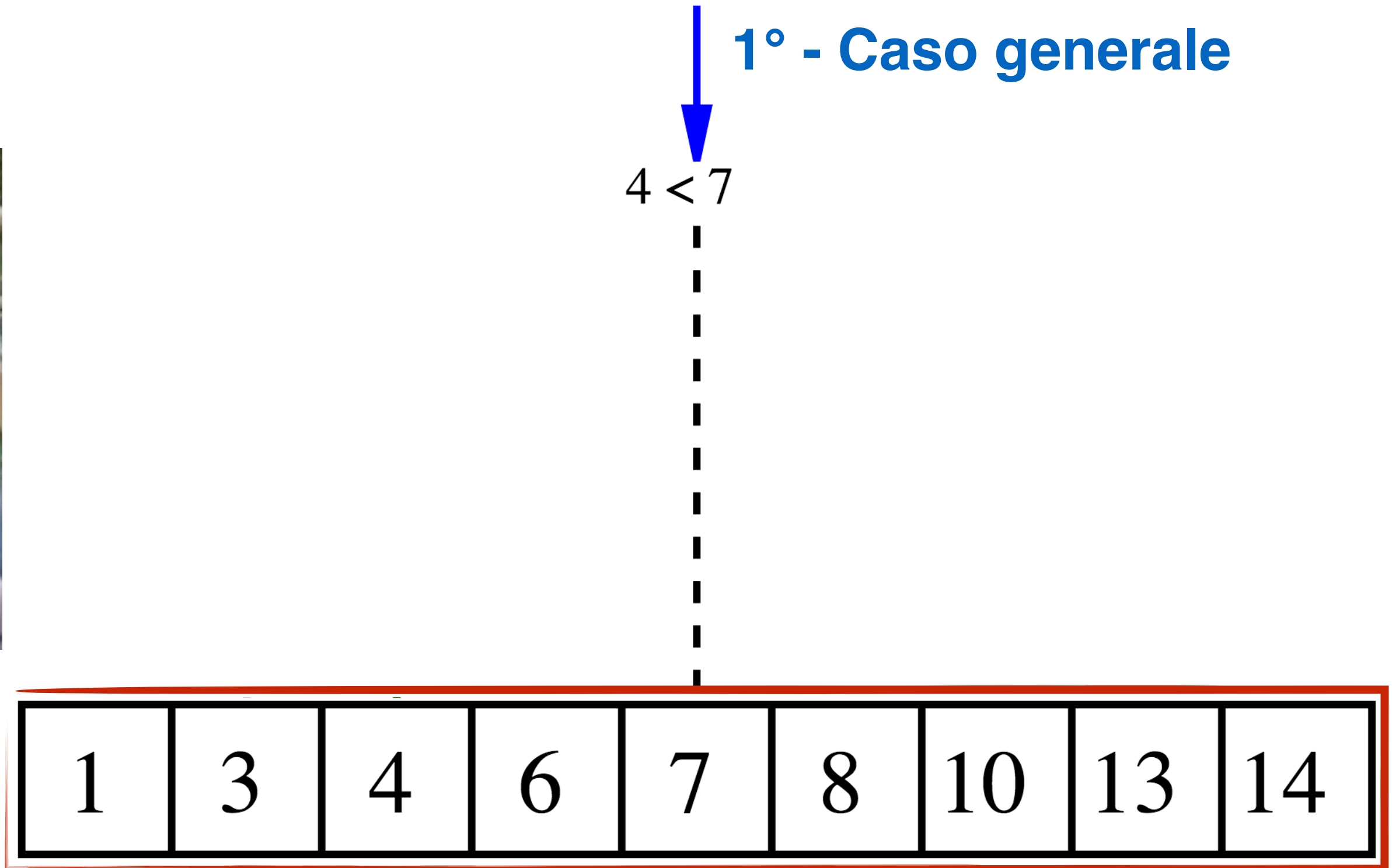
```
    end
```

# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

---

**1° - Caso generale**

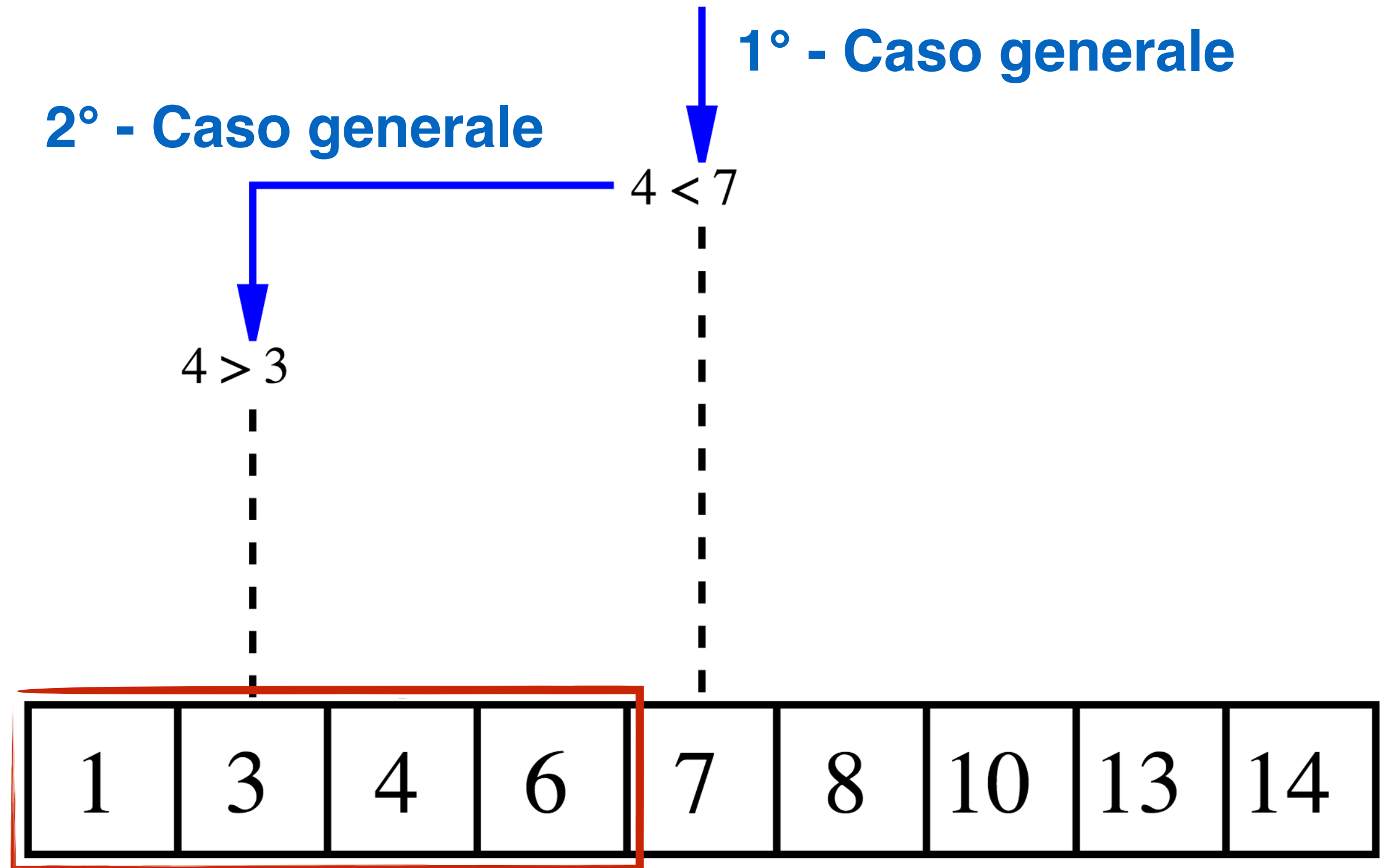
4 < 7



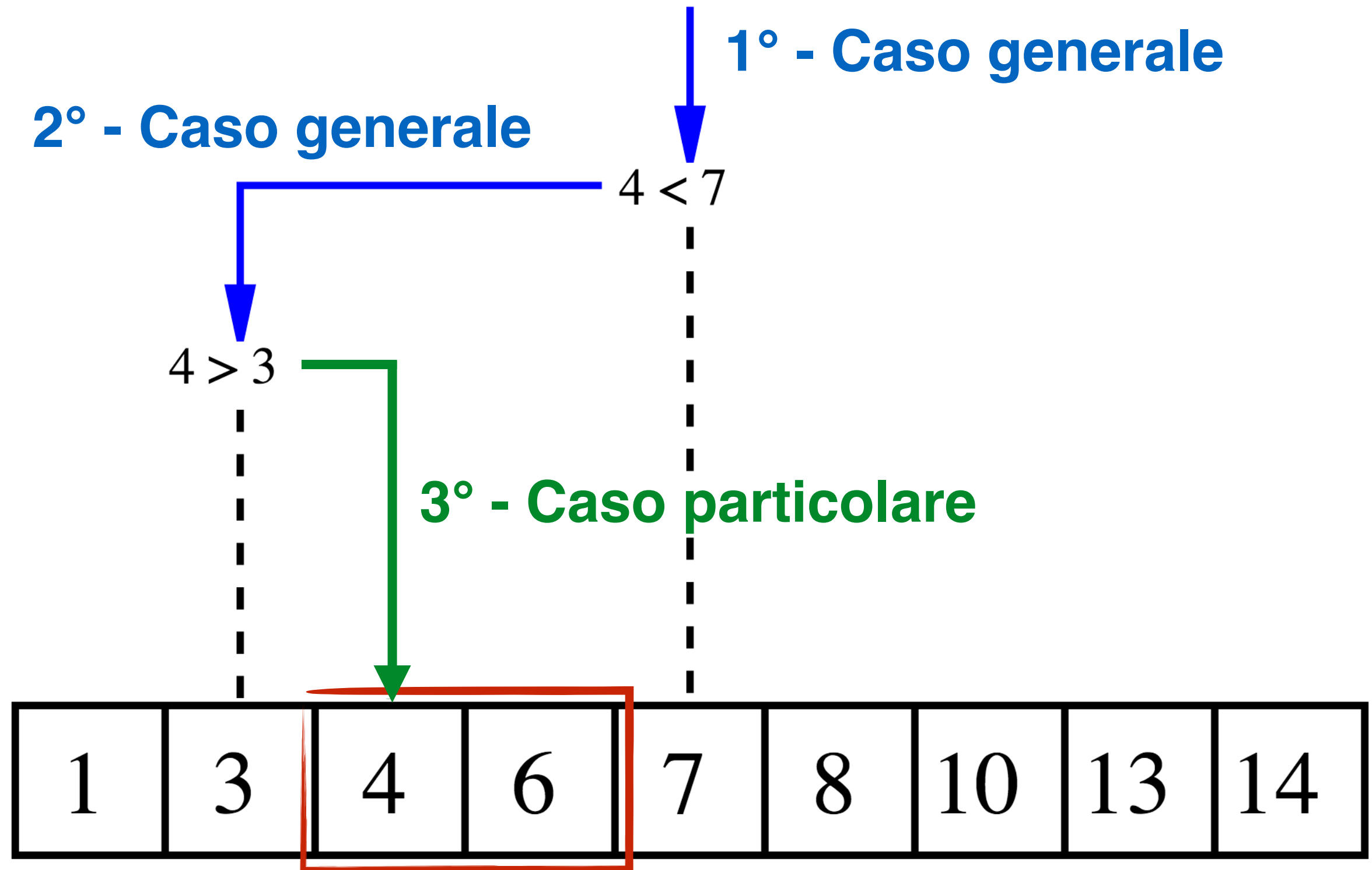
1	3	4	6	7	8	10	13	14
---	---	---	---	---	---	----	----	----



# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)



# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)



# Esercizio: ricerca binaria (ricorsiva)

```
function val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra)

    elementoMedio = floor((limDestra + limSinistra)/2);
```

```
    if (v(elementoMedio) == cercato)
        val = elementoMedio;
    else
```

**Caso particolare**

```
        if (v(elementoMedio) > cercato)
            limDestra = elementoMedio;
        else
            limSinistra = elementoMedio;
        end
```

**Caso generale**

```
        val = ricercaBinaria(v, cercato, limSinistra, limDestra);
```

```
    end
```

# Agenda

---

~~(20') Sottomatrici, da un altro punto di vista~~

~~(30') Ricerca binaria (ricorsiva)~~

(30') Calcolo derivata (ricorsiva)

(30') Numero primo, in tutte le salse

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

- Rappresentiamo un **polinomio** con un **vettore** contenente i suoi **coefficienti**, dal termine di grado massimo a quello di grado minimo.

*Si noti che un polinomio di grado  $n$  corrisponde a un vettore di lunghezza  $n+1$*

*Esempio:  $3x^4 + 5x^2 + 2x + 7$  (grado 4) corrisponde  
al vettore **[3 0 5 2 7]** (lunghezza 5)*

- Scrivere una funzione ricorsiva di nome **derivata** che:
  1. Riceva in ingresso un vettore che rappresenta un polinomio e un valore  $n$
  2. Restituisca un vettore che rappresenta la derivata  $n$ -esima del polinomio

- Per calcolare la **derivata prima** del polinomio applicare la comune regola di derivazione per i polinomi.

**Caso particolare**

- Calcolare la **derivata  $n$ -esima** come la **derivata prima della derivata  $(n-1)$ -esima**

**Caso generale**

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

---

```
function[der] = derivata (pol, n)
```

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

---

```
function[der] = derivata (pol, n)

% Caso base: calcolo della derivata prima
if n==1

else

    % Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima

end
```

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

---

```
function[der] = derivata (pol, n)

% Caso base: calcolo della derivata prima
if n==1

else

    % Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima
    der = derivata(derivata(pol, n-1), 1)

end
```



# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

---

```
function[der] = derivata (pol, n)

% Caso base: calcolo della derivata prima
if n==1

    % Vettore con gli esponenti dei singoli monomi
    % Es. per  $2x^3 + x^2 + 3 \rightarrow \text{esp} = [3 \ 2 \ 1]$ 
    esp = [length(pol)-1 : -1 : 1]

else

    % Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima
    der = derivata(derivata(pol, n-1), 1)

end
```

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

```
function[der] = derivata (pol, n)
```

```
% Caso base: calcolo della derivata prima
```

```
if n==1
```

```
% Vettore con gli esponenti dei singoli monomi
```

```
% Es. per  $2x^3 + x^2 + 3 \rightarrow \text{esp} = [3 \ 2 \ 1]$ 
```

```
esp = [length(pol)-1 : -1 : 1]
```

```
% Calcolo della derivata prima:
```

```
% Es. per il polinomio precedente:
```

```
%  $[3 \ 2 \ 1].*[2 \ 1 \ 0] = [6 \ 2 \ 0]$ 
```

```
der = esp.*pol(1:length(pol)-1)
```

**Caso particolare**

```
else
```


```
% Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima
```

```
der = derivata(derivata(pol, n-1), 1)
```

**Caso generale**

```
end
```

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

% Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima  
der  derivata(derivata(pol, n-1), 1)

$5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x^1 + 1$  (grado 5)  
corrisponde al vettore **[5 4 3 2 1 1]** (lunghezza 6)

derivata(pol, 3)

der = derivata(**derivata(pol, 2)**, 1)

**derivata(pol, 2)** 


der = derivata(**derivata(pol, 1)**, 1)

**derivata(pol, 1)** 

esp = [5 4 3 2 1]

der = **[25 16 9 4 1]**

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

% Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima  
der  derivata(derivata(pol, n-1), 1)


$5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x^1 + 1$  (grado 5)  
corrisponde al vettore **[5 4 3 2 1 1]** (lunghezza 6)

derivata(pol, 3)

der = derivata(**derivata(pol, 2)**, 1)

**derivata(pol, 2)** 


**der = derivata([25 16 9 4 1], 1)**

 derivata([25 16 9 4 1], 1)

esp = [4 3 2 1]

der = **[100 48 18 4]**

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

% Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima  
der  derivata(derivata(pol, n-1), 1)

**5** $x^5$  + **4** $x^4$  + **3** $x^3$  + **2** $x^2$  + **1** $x^1$  + **1** (*grado 5*)  
corrisponde al vettore [**5 4 3 2 1 1**] (*lunghezza 6*)


derivata(pol, 3)

der = derivata(**derivata(pol, 2)**, 1)

**derivata(pol, 2)** 

der = [**100 48 18 4**]

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

% Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima  
der  derivata(derivata(pol, n-1), 1)

$5x^5 + 4x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 1x^1 + 1$  (grado 5)  
corrisponde al vettore **[5 4 3 2 1 1]** (lunghezza 6)

derivata(pol, 3)

der = **derivata([100 48 18 4], 1)**




**derivata([100 48 18 4], 1)**

esp = [3 2 1]

der = **[300 96 18]**

# Esercizio: calcolo derivata (ricorsiva)

% Passo ricorsivo: derivata (n-1)-esima della derivata prima  
der  derivata(derivata(pol, n-1), 1)

**5** $x^5$  + **4** $x^4$  + **3** $x^3$  + **2** $x^2$  + **1** $x^1$  + **1** (*grado 5*)  
corrisponde al vettore [**5 4 3 2 1 1**] (*lunghezza 6*)

derivata(pol, 3)

der = [**300 96 18**]

# Agenda

---

~~(20') Sottomatrici, da un altro punto di vista~~

~~(30') Ricerca binaria (ricorsiva)~~

~~(30') Calcolo derivata (ricorsiva)~~

(30') Numero primo, in tutte le salse



# Numero primo, in tutte le salse

---

- Dato un numero intero positivo inserito dall'utente, dire se tale numero è primo (stampa a video 1 se primo, 0 altrimenti).
- Un numero è primo se è divisibile solo per 1 e se stesso.

Esempio:

- $7 \longrightarrow 1$
- $9 \longrightarrow 0$
- $9871 \longrightarrow ?$

# Numero primo, soluzione *iterativa*

---

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
```

# Numero primo, soluzione *iterativa*

---

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)

    for y=2:sqrt(x)

    end
```

# Numero primo, soluzione *iterativa*

---

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
    end
```

← un numero è **primo**  
fino a **prova contraria!**

# Numero primo, soluzione *iterativa*

---

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
        ris = ris*(~(rem(x,y)));
    end
```

un numero è **primo**  
fino a **prova contraria!**

basta che sia **0** ad una iterazione qualsiasi  
per aver trovato la “**prova contraria**”

# Numero primo, soluzione *ricorsiva*

---

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
        ris = ris*(~(rem(x,y)));
    end
```


```
function [ris] = numeroPrimoRicorsiva(x,y)
```

# Numero primo, soluzione *ricorsiva*

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
        ris = ris*(~(rem(x,y)));
    end
```

```
function [ris] = numeroPrimoRicorsiva(x,y)
```

```
    ris = (~(rem(x,y)))*numeroPrimoRicorsiva(x,y+1);
```



# Numero primo, soluzione *ricorsiva*

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
        ris = ris*(~(rem(x,y)));
    end
```

```
function [ris] = numeroPrimoRicorsiva(x,y)
```

```
    ris = 1;
```

```
    ris = (~(rem(x,y)))*numeroPrimoRicorsiva(x,y+1);
```



# Numero primo, soluzione *ricorsiva*

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
        ris = ris*(~(rem(x,y)));
    end
```

```
function [ris] = numeroPrimoRicorsiva(x,y)
    if y>sqrt(x)
        ris = 1;
    else
        ris = (~(rem(x,y)))*numeroPrimoRicorsiva(x,y+1);
    end
```

# Numero primo, soluzione *ricorsiva*

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
        ris = ris*(~(rem(x,y)));
    end
```

```
function [ris] = numeroPrimoRicorsiva(x,y)
    if y>sqrt(x)
        ris = 1;
    else
        ris = (~(rem(x,y)))*numeroPrimoRicorsiva(x,y+1);
    end
```

# Numero primo, soluzione *ricorsiva*

```
function [ris] = numeroPrimoIterativa(x)
    ris=1;
    for y=2:sqrt(x)
        ris = ris*(~(rem(x,y)));
    end
```

```
function [ris] = numeroPrimoRicorsiva(x,y)
    if y>sqrt(x)
        ris = 1;
    else
        ris = ( ~(rem(x,y)) ) * numeroPrimoRicorsiva(x,y+1);
    end
```

# Numero primo, soluzione *vettoriale*

---

```
function [ris] = numeroPrimoVettoriale(x)
```

# Numero primo, soluzione *vettoriale*

---

```
function [ris] = numeroPrimoVettoriale(x)  
    divisori = 2:sqrt(x);
```

# Numero primo, soluzione *vettoriale*

---

```
function [ris] = numeroPrimoVettoriale(x)
    divisori = 2:sqrt(x);
    resti = rem(x,divisori);
    maschera = (resti == 0);
```

# Numero primo, soluzione *vettoriale*

---

```
function [ris] = numeroPrimoVettoriale(x)
    divisori = 2:sqrt(x);
    resti = rem(x,divisori);
    maschera = (resti == 0);
    ris = ~any(maschera);
```

# Numero primo, soluzione *vettoriale* (compatta)

---

```
function [ris] = numeroPrimoVettoriale(x)
    divisori = 2:sqrt(x);
    resti = rem(x,divisori);
    maschera = (resti == 0);
    ris = ~any(maschera);
```

**Equivalente a**

```
function [ris] = numeroPrimoVettoriale(x)
    ris = ~any(rem(x,2:sqrt(x)) == 0);
```



# Esempio di invocazione

---

```
numeroDaControllare = 9871;  
numeroPrimoIterativa(numeroDaControllare)  
numeroPrimoRicorsiva(numeroDaControllare,2)  
numeroPrimoVettoriale(numeroDaControllare)
```